

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

Centre de préparation au Diplôme d'Etat d'Audioprothésiste

Concours d'entrée : épreuve de mathématiques

Durée 1 heure

Tous les exercices sont indépendants.
La calculatrice est autorisée

En annexe : un formulaire.

Le sujet comprend 2 pages.

Exercice 1 : (8 points)

Soit la fonction f de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)$$

On appellera \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan P, rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On veut étudier les variations de f sur son ensemble de définition

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
- b) Démontrer que

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

(Aide : on pourra écrire f sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{I(x)}$ où

$P(x)$ est un polynôme du premier degré en x
et $I(x)$ est une expression irrationnelle de la variable x)

c) Démontrer que la fonction est croissante.

(Aide : on pourra distinguer 2 cas : le cas où $x \geq -\frac{1}{2}$ et celui où $x < -\frac{1}{2}$)

d) Construire son tableau de variation

2. On s'intéresse aux branches infinies de la fonction

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$. En déduire l'équation de l'asymptote à la courbe C en $+\infty$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2} \right)$. En déduire l'équation de l'asymptote à la courbe \mathcal{C} en $-\infty$

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = -1$

4. Construire \mathcal{C} et ses deux asymptotes sur l'intervalle $[-5; 3]$. on placera en particulier les points d'abscisses $x = -1$ et $x = 0$

5. Construire sur l'intervalle $[-1; 2[$ le tableau de variation et la représentation graphique de la fonction g , périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[-1; 0[$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)$

Exercice 2 : (2,5 points)

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$Z^2 - mZ + 1 = 0 \text{ selon les valeurs du paramètre } m, m \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 : (3,5 points).

On veut résoudre dans \Re l'inéquation :

$$\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \geq 0$$

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
2. Démontrer que $h(x) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$ est périodique et indiquer sa période.
3. En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation.

Exercice 4 : (6 points)

Soit l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \cdot dx$$

Où n est un nombre entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. On considère maintenant le cas où $n \geq 2$
En écrivant I_n sous la forme

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \cdot dx$$

puis en intégrant par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-2} .

3. a) On se place dans le cas où n est un nombre pair et on pose $n = 2p$.
Calculer I_{2p} en fonction de p .
- b) On se place dans le cas où n est un nombre impair et on pose $n = 2p + 1$.
Calculer I_{2p+1} en fonction de p .

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS
Centre de préparation au diplôme d'état d'audioprothésiste

Épreuve de physique – Durée 2 heures
4 Juillet 2008

Exercice 1 : Propagation des ondes (8 points)

Données :

- vitesse du son dans l'air : $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- La fréquence d'une onde est indépendante du milieu de propagation.

1. Lorsqu'une goutte de pluie tombe à la surface d'une étendue d'eau immobile, on observe alors une ride circulaire.
 - a. Qualifiée en le justifiant le type d'onde observée.
 - b. Pourquoi la ride est-elle circulaire ?

2. Un son est émis par un instrument de musique. Un microphone placé à proximité de cet instrument et relié à un oscilloscope, réglé sur la base de temps $250 \mu\text{s.div}^{-1}$, permet d'obtenir l'enregistrement (figure 1) fourni sur la feuille annexe.
 - a. Déterminer la période et la fréquence de ce son. On indiquera sur la **figure 1** de la feuille annexe la méthode employée.
 - b. Déterminer la longueur d'onde de ce son dans l'air.

3. Lors du passage de la lumière blanche à travers un prisme, on observe un spectre coloré continu.
 - a. Quelle conclusion pouvez-vous tirer sur la nature de la lumière blanche ?
 - b. Nommer et décrire brièvement le phénomène responsable de la décomposition de la lumière blanche par un prisme.

4. Dans le vide, une lumière monochromatique visible est caractérisée par sa longueur d'onde λ_0 telle que $380 \text{ nm} < \lambda_0 < 780 \text{ nm}$ et par sa fréquence ν telle que $3,8.10^{14} \text{ Hz} < \nu < 7,9.10^{14} \text{ Hz}$.
 - a. En justifiant, indiquer si une lumière monochromatique de fréquence 9.10^{14} Hz est visible, UV ou IR.
 - b. Une lumière a une longueur d'onde $\lambda = 750 \text{ nm}$ dans un milieu transparent d'indice $n = 2$. Déterminer sa célérité, sa fréquence et en déduire s'il s'agit-il d'une onde visible, UV ou IR ? Justifier.

5. Une lumière monochromatique de longueur d'onde λ traverse une fente fine de largeur a (voir **figure 2** de la feuille annexe). Une figure de diffraction se forme alors sur l'écran situé à la distance D de la fente. La tache centrale de cette figure est caractérisée par l'angle θ tel que : $\theta = \lambda / a$.
 - a. Que représente l'angle θ et l'indiquer sur la figure 2 de la feuille annexe ?
 - b. La tache centrale est-elle la plus large pour une radiation monochromatique rouge ou bleue ? Justifier.

Exercice 2 : Temps caractéristiques (12 points) *Les deux parties de l'exercice sont indépendantes*

1ère partie : évolution de l'activité d'un échantillon radioactif

L'activité $A(t)$ d'un échantillon contenant un radio isotope évolue au cours du temps selon la loi :

$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ avec A_0 l'activité initiale de l'échantillon et λ la constante de désintégration (ou constante radioactive), caractéristique du radio isotope considéré. La constante λ s'exprime en s^{-1} dans le système international.

1. Définir ce que l'on nomme « activité d'un échantillon radioactif ». (*La définition attendue n'est pas mathématique*). Indiquer son unité dans le système international.
2. La grandeur $\tau = 1 / \lambda$ est appelée constante de temps. Justifier le choix de cette appellation.
3. Exprimer puis calculer $A(\tau) / A_0$.
4. Entre les dates $t = 0$ et $t = \tau$, de quel pourcentage chute l'activité ?
5. La demi-vie radioactive du radio isotope est notée $t_{1/2}$. Exprimer $A(t_{1/2})$ en fonction de A_0 . (*sans justification*)
6. Expliquer lequel des deux temps caractéristiques $t_{1/2}$ ou τ est le plus grand.
7. Pour pratiquer une imagerie médicale, on injecte à 8 heures du matin par perfusion à un patient une dose de fluor 18 ($^{18}_9\text{F}$) dont l'activité initiale est $6 \cdot 10^8$ Bq. L'examen se termine à 11h. $t_{1/2}(^{18}\text{F}) = 110$ min et $Z(\text{O}) = 8$.
 - a. Quelle est la composition du noyau de fluor 18 ?
 - b. Ecrire l'équation de désintégration du fluor 18 sachant que son noyau fils est l'oxygène 18. Quelle est la nature de cette désintégration radioactive ?
 - c. En justifiant, indiquer si l'activité résiduelle dans l'organisme du patient à la fin de l'examen est inférieure à $1,5 \cdot 10^8$ Bq, comprise entre $1,5 \cdot 10^8$ Bq et $3 \cdot 10^8$ Bq ou comprise entre $3 \cdot 10^8$ Bq et $6 \cdot 10^8$ Bq.

2ème partie : dipôle RC

A l'aide d'un ordinateur équipé d'une carte d'acquisition, le montage schématisé dans l'annexe permet de suivre l'évolution de la tension u_{AB} aux bornes d'un condensateur de capacité C monté en série avec une résistance $R = 100$ W. Le générateur fournit une tension constante E . Le commutateur est laissé longtemps en position 2 puis à $t = 0$, on le bascule en position 1 en déclenchant simultanément l'enregistrement de l'évolution de u_{AB} .

Le résultat de l'acquisition informatisée est fourni en annexe (**graphe 1**).

1. Pourquoi le commutateur est-il laissé longuement en position 2 avant de procéder à l'acquisition des valeurs ?
2. L'expression de la tension aux bornes du condensateur est : $u_{AB}(t) = E \cdot (1 - e^{-t/\tau})$
 - a. Quelle est l'expression de la constante de temps t en fonction de R et C ?
 - b. Le temps $t_{1/2}$ de demi-charge du condensateur est tel que : $u_{AB}(t_{1/2}) / E = 1/2$
En déduire l'expression de $t_{1/2}$ en fonction de t .
 - c. Déterminer graphiquement $t_{1/2}$.
 - d. En déduire la capacité C du condensateur parmi les valeurs suivantes : 220 nF ; 2,2 μF ; 22 μF ;

(La calculatrice n'est pas autorisée)

Question n°1 : (6 points)

Brassage génétique

Afin d'illustrer la diversité des génomes, on cherche à interpréter les résultats d'un test-cross chez un organisme diploïde, la Drosophile, dans le cas de deux couples d'allèles.

A partir de l'exploitation des résultats des deux croisements:

- Prouvez que l'hypothèse "les deux gènes sont situés sur des chromosomes différents" est fautive;
- Expliquez par quel phénomène on obtient les résultats de la génération F2.

(votre explication sera illustrée de schémas et de tout élément indispensable à la justification).

Croisement 1:

Un premier croisement est réalisé entre deux parents de souches pures. Il y a autant de mâles que de femelles.

Les femelles sont à œil rouge et aux ailes longues [Bw+; Vg+], et les mâles sont à œil brun clair (Brown) et à ailes vestigiales [Bw; Vg]. La génération F1 obtenue donne 100% d'individus [Bw+; Vg+].

Croisement 2: (Test-cross)

La génération F2 est obtenue en croisant des femelles F1 avec des mâles [Bw; Vg].

Les résultats sont les suivants:

[Bw+; Vg+]: 47%

[Bw+; Vg] : 3%

[Bw; Vg] : 47%

[Bw; Vg+] : 3%

Question n°2 : (6 points)

Principe immunologique du test de grossesse

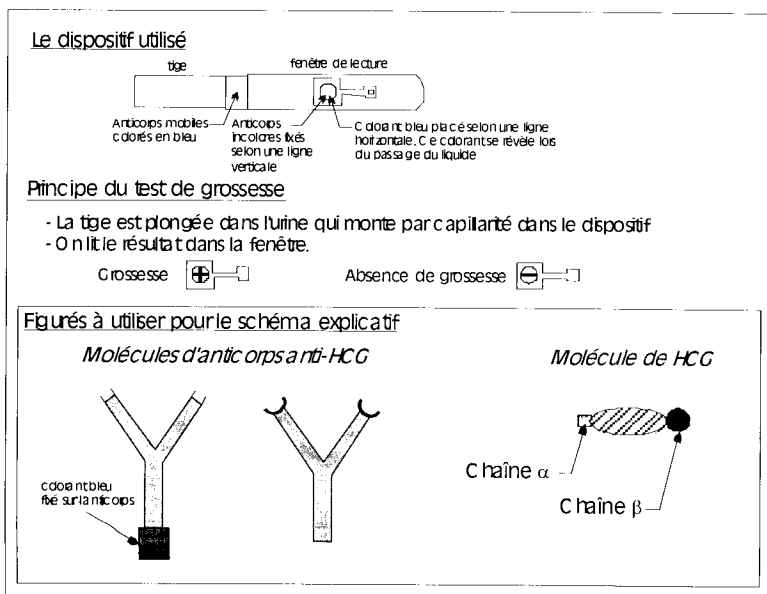
Dès les premiers jours de son implantation dans l'utérus, le jeune embryon sécrète une hormone: la HCG (hormone chorionique gonadotrope humaine).

Après avoir pris connaissance du document, réalisez un schéma et expliquez le principe du test de grossesse basé sur la spécificité anticorps-antigène.

Document:

Mise en évidence de la présence de HCG dans les urines

La HCG est une hormone glycoprotéique qui stimule le corps jaune. Elle est formée de deux sous unités α et β . Elle passe dans l'organisme de la mère où elle est ensuite dégradée et éliminée dans les urines. cependant, 20% des molécules de HCG sont retrouvées non dégradées dans les urines maternelles. Elles peuvent ainsi être détectées par un test de grossesse contenant des anticorps anti-HCG. Il existe plusieurs types d'anticorps capables de se fixer soit à la chaîne α , soit à la chaîne β .



Question n°3 : (6 points)

Cas d'infertilité

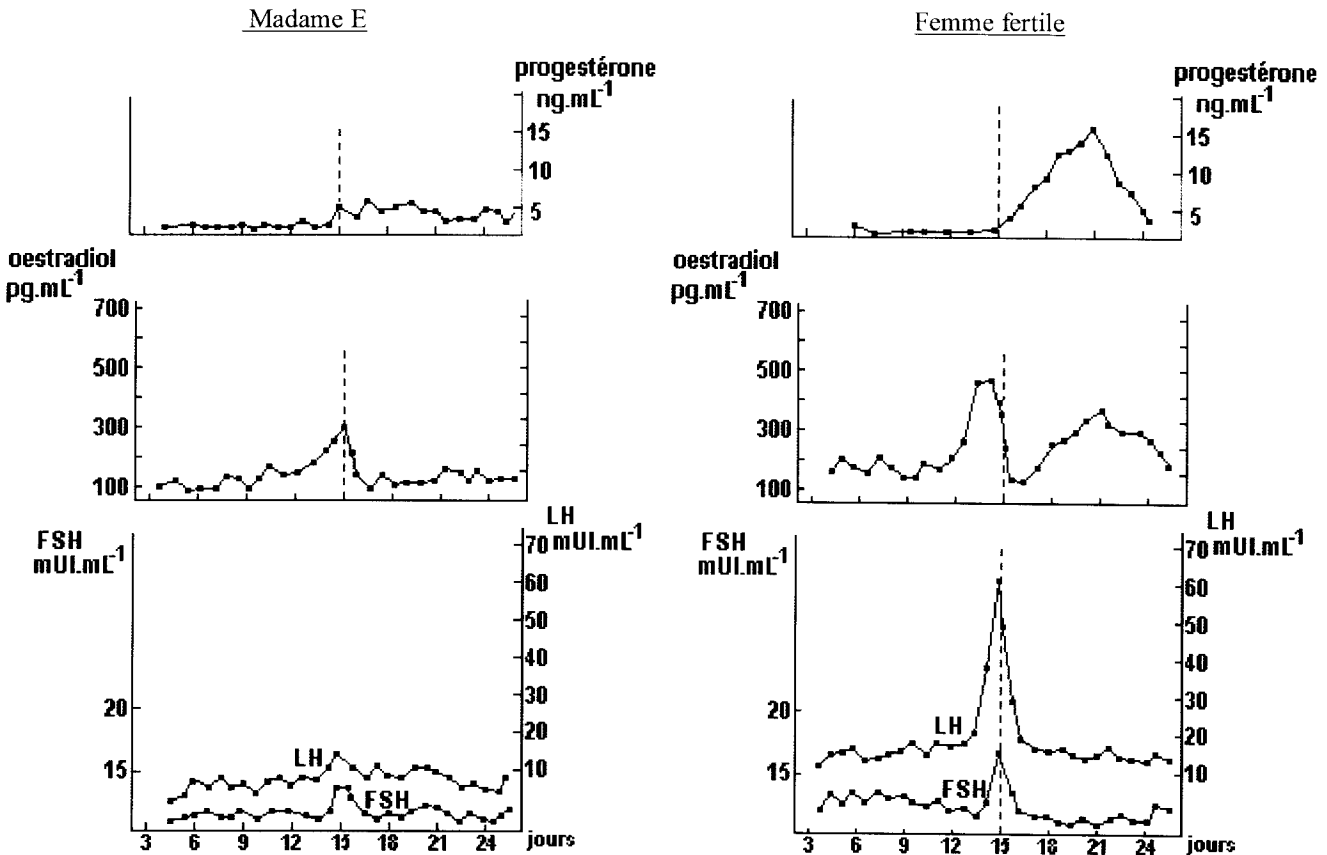
La connaissance du cycle de régulation des hormones sexuelles chez la femme permet de résoudre certains problèmes d'infertilité à l'aide de techniques de procréation médicalement assistée.

À partir de l'exploitation des documents et de la mise en relation avec vos connaissances :

- identifiez les causes de l'infertilité de Madame E et proposez une hypothèse pour les expliquer ;
- expliquez à quoi conduit le traitement hormonal de Madame E.

Document 1 :

Madame E rencontre des difficultés pour avoir un enfant et consulte un gynécologue. Le spermogramme de son mari étant normal, le médecin lui propose de faire effectuer des dosages hormonaux réguliers. Les résultats obtenus permettent de tracer les graphes 1 ci-dessous ; les graphes 2 correspondent aux mêmes dosages effectués chez une femme fertile et sont donc les graphes de référence.



Document 2 : traitement proposé à Madame E

- durant une dizaine de jours, injections quotidiennes de FSH en continu, puis réalisation d'une échographie ovarienne (Ci-dessous). Après ces dix jours, injection d'une forte et unique dose de LH.



A rendre avec la copie

Numéro de candidat

Question n°4: (2 points)

A l'aide du tableau de comparaison:

- placez sur l'arbre les différents caractères,
- placez la grenouille en justifiant votre réponse.

Arbre phylogénétique des vertébrés

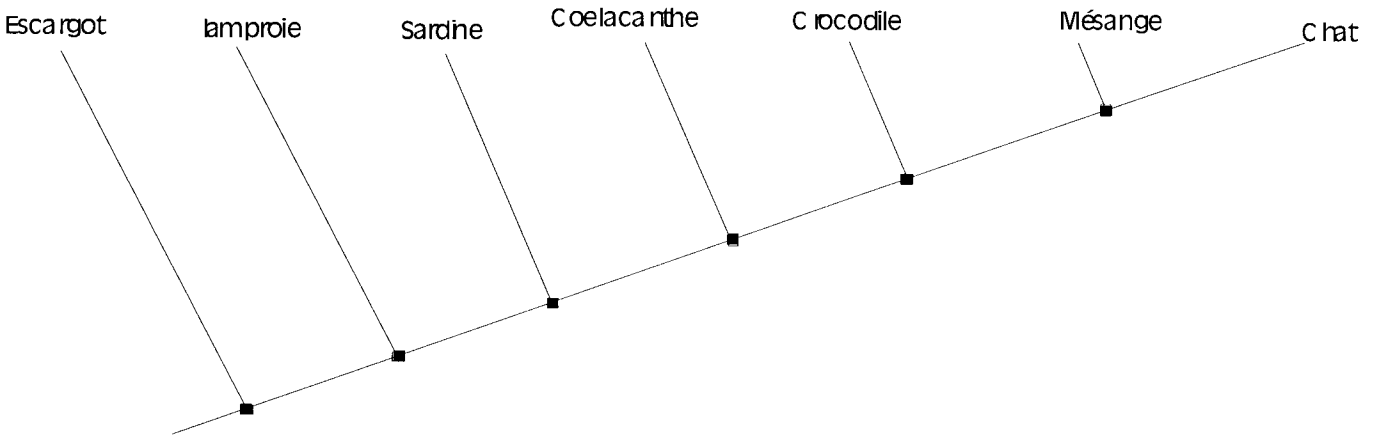


Tableau de comparaison des caractères

| Espèces \ Caractères | Cellules eucaryotes | Présence de vertèbres | Présence de mâchoire | Présence de doigts | Présence d'un amnios | Présence de poils |
|----------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|-------------------|
| Chat | oui | oui | oui | oui | oui | oui |
| Coelacanth | oui | oui | oui | non | non | non |
| Crocodile | oui | oui | oui | oui | oui | non |
| Escargot | oui | non | non | non | non | non |
| Grenouille | oui | oui | oui | oui | non | non |
| Lamproie | oui | oui | non | non | non | non |
| Mésange | oui | oui | oui | oui | oui | non |
| Sardine | oui | oui | oui | non | non | non |