CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

Centre de préparation au Diplôme d'État d'Audioprothésiste

Épreuve de mathématiques

4 juin 2013.
Durée 1 heure.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte deux pages, les cinq exercices sont indépendants.
En annexe, pages 3 et 4 : un formulaire.
Barème indicatif :
Exercice 1 : 4 pts ; exercice 2 : 4 pts ; exercice 3 : 2 pts ; exercice 4 : 7 pts ; exercice 5 : 3 pts.

Exercice 1.

On considère la fonction de la variable réelle *x* définie par

$$f(x) = \frac{(Lnx)^2}{x}$$

1. Étudier la fonction sur son ensemble de définition.
   Pour ce faire, après avoir déterminé l'ensemble de définition de la fonction, on calculera les limites aux bornes de l'ensemble, on déterminera les variations de la fonction. Les résultats de l'étude seront résumés dans le tableau de variation. On donnera également l'allure de la courbe en faisant apparaitre les maxima ou minima éventuels, et les asymptotes.

2. Soit $I_m = \int_1^m f(x)dx$, où m est un paramètre réel, $m > 1$
   a) Exprimer I_m en fonction de m
   b) En déduire la valeur de I_m lorsque m est au voisinage de l'infini.

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations : $\begin{cases} \cos x < -\frac{1}{2} \\ \sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 3 .

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :
$(E) \Leftrightarrow \; z^3 - 1 = 0$

2. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 4.

Les fonctions qui suivent sont des fonctions de la variable réelle x,
m est un paramètre réel non nul.

Partie A.

Déterminer la période de la fonction $g_m(x) = \cos(mx)$.
Soit T la période obtenue.

Partie B.

On considère la fonction f_m définie sur $[0, T]$ par :

$$f_m(x) = cos(mx) + mx$$

Selon m :

1. Déterminer les limites de f_m aux bornes de $[0, T]$.
2. Étudier les variations de la fonction f_m sur $[0, T]$.
3. En déduire le tableau de variation de f_m sur $[0, T]$.

Partie C.

Soit la fonction h_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_m(x) = cos(mx) + mx$$

On appellera C_m sa courbe représentative dans le plan P, rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. La fonction est-elle périodique ? Si oui, quelle est la valeur de la période ?
2. La fonction est-elle paire ? impaire ? Si c'est le cas, en déduire l'intervalle d'étude de la fonction.

Selon m :

3. Déterminer les limites de h_m aux bornes de l'ensemble $\mathbb{R}$
4. Construire le tableau de variation de h_m sur l'intervalle $[-T, 2T]$
5. Donner l'allure de la courbe C_m sur l'intervalle $[-T, 2T]$.

Exercice 5.

Soit la fonction f de la variable réelle x, paire, de période $T = 2$, définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 & si\ x \in]0, 1] \\ f(x) = 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Construire le tableau de variations de f sur $[0, 1]$ puis la représentation graphique de la fonction sur cet intervalle.
2. En déduire la représentation graphique de la fonction sur l'intervalle$[-1, 1]$ puis l'expression de la fonction sur cet intervalle.
3. En déduire la représentation graphique de la fonction sur l'intervalle $[1, 3]$ puis l'expression de la fonction sur cet intervalle.

Formulaire de mathématiques

Trigonométrie :

Soit x un arc, l'image de x est le point M . x , mesure de $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$

$$\begin{cases} x_M = \cos x & -1 \le \cos x \le 1 \\ y_M = \sin x & -1 \le \sin x \le 1 \end{cases}.$$

$$\left\{ tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \right. .$$

$$\left\{ ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \ne k\pi, \quad k \in Z \right. .$$

Formules fondamentales :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

$$ctgx = \frac{1}{tgx}$$

Formules d'addition :

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Formules de duplication :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

Si $t = tg\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} \sin a = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ tga = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}.$$

Formules de transformation en produit d'une somme ou d'une différence de sinus ou de cosinus :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Formules de transformation en somme ou différence d'un produit de sinus ou de cosinus :

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)$$

Dérivées usuelles :

fonctions	Fonctions dérivées	intervalles
$x^n \quad n \in Z$	nx^{n-1}	$\Re^*$.
$x^\alpha \quad \alpha \in \Re$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\Re^{+*}$.
$e^{cx} \quad c \in C$	ce^{cx}	$\Re$.
$Ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\Re^*$.
$\cos x$.	$-\sin x$	$\Re$.
$\sin x$	$\cos x$.	$\Re$.
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$\Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = 1 - ctg^2 x$	$\Re - \{k\pi\}$

Primitives usuelles :

fonctions	Fonctions primitives	intervalles
$x^n \quad n \in Z - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\Re$.
$x^\alpha \quad \alpha \in \Re$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\Re^{+*}$.
$e^{cx} \quad c \in C^*$	$\frac{e^{cx}}{c}$	$\Re$.
$\frac{1}{x-a} \quad a \in \Re$.	$Ln\lvert x-a\rvert$.	$\Re - \{a\}$
$\cos x$.	$\sin x$	$\Re$.
$\sin x$	$-\cos x$.	$\Re$.
tgx .	$-Ln\lvert\cos x\rvert$.	$\Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
$ctgx$	$-Ln\lvert\sin x\rvert$.	$\Re - \{k\pi\}$

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

Centre de préparation au diplôme d'état d'audioprothésiste

Epreuve de BIOLOGIE

durée (2 heures)

04 JUIN 2013

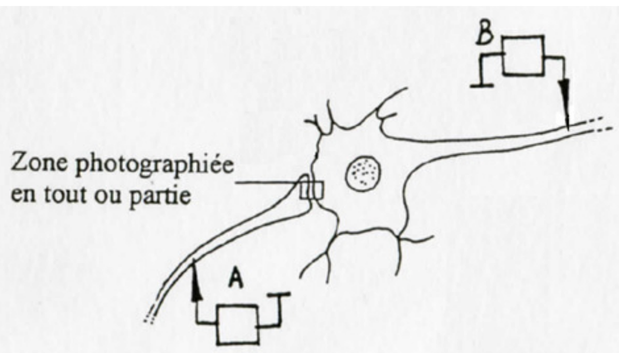
(La calculatrice n'est pas autorisée)

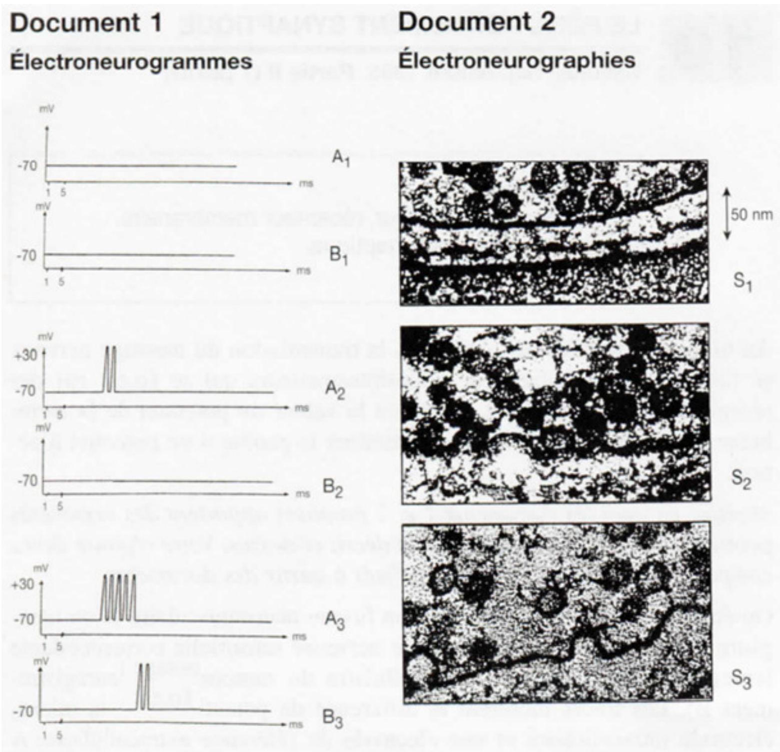
<u>Question 1</u> : (6 points)

<u>Réflexe myotatique et message nerveux</u>

Lors d'un réflexe myotatique, un choc sur le tendon d'un muscle provoque sa contraction.
Afin d'étudier le cheminement et la nature des messages nerveux, l'expérience suivante est réalisée.
On étire de plus en plus fortement un fuseau neuromusculaire (1 à 3), et on enregistre les effets au niveau du neurone sensitif correspondant (enregistrement A) et du motoneurone (enregistrement B).
Les électroneurogrammes montrent la différence de potentiel entre les milieux extracellulaire et le cytoplasme de chaque neurone. A chaque enregistrement correspond une électroneurographie de l'état de la synapse.

A partir des seuls documents, retrouvez des caractéristiques d'un message nerveux et dites sous qu'elle forme il est codé au niveau des neurones et de la synapse.





<u>Question 2</u> : (points) <u>Evolution de phénotypes immunitaires</u>

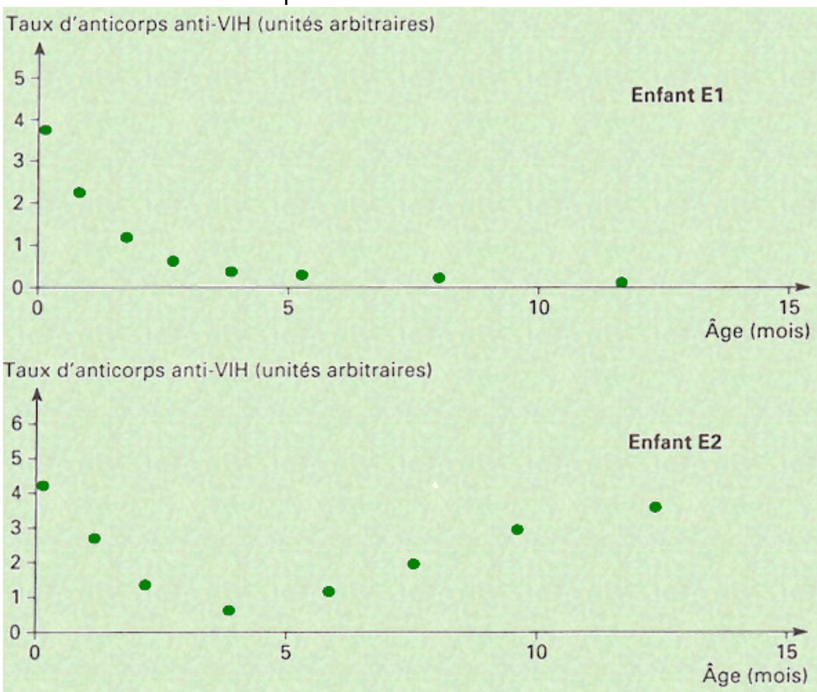
On cherche à comprendre la cause de l'évolution de la séropositivité pour le VIH de deux enfants : E1 né de la mère M1 et E2 né de la mère M2.

Par la mise en relation des informations apportées par les documents 1 à 3 et vos connaissances, expliquez l'origine et les évolutions différentes de la séropositivité chez ces deux enfants.

Document 1 : Résultats de test réalisés chez différents individus
Le test Elisa révèle présence d'anticorps anti-VIH grâce à une réaction colorée.
La charge virale mesure le nombre de copies d'ARN viral par millilitre de plasma

Individus testés	Témoin T1	Témoin T2	Mère de E1	Enfant E1	Mère de E2	Enfant E2
	non contaminé par le VIH	infecté par le VIH	Tests réalisés lors de la grossesse	Tests réalisés à la naissance	Tests réalisés lors de la grossesse	Tests réalisés à la naissance
Test Elisa	Négatif cupule non colorée	Positif cupule colorée				
Charge virale en copie d'ARN mL^{-1}	0	comprise entre 10^1 et 10^8	environ 10^4	0	environ 10^4	environ 5.10^2

Document 2 : Mesures du taux d'anticorps anti-VIH chez E1 et E2



Question 3 : **(6 points)** La plante domestiquée : Obtenir une variété nouvelle.

Une équipe d'agronomes cherche à obtenir une nouvelle variété de tomates possédant de gros fruits et une maturation ralentie afin de pouvoir les conserver plus longtemps.
Ces chercheurs ont à leur disposition deux variétés dont les phénotypes sont les suivant :
- Variété A : [gros fruits ; maturation rapide]
- Variété B : [petits fruits ; maturation inhibée]

Ils vont réaliser un ensemble de croisements dans le but d'obtenir 100% d'individus ayant des gros fruits à maturation ralentie.
A l'aide des informations fournies, retrouvez les croisements nécessaires pour obtenir lors du dernier croisement, 100% des individus de phénotype [gros fruit ; maturation ralentie].

Document :
Les deux caractères étudiés sont gérés chacun par un seul gène
Les allèles de chaque gène sont :
- g pour gros fruit et g+ pour petit fruit (g+ est dominant sur g)
- m pour maturation inhibée et m+ pour maturation rapide (m et m+ sont codominants)
- Les individus hétérozygotes pour le gène m, ont pour phénotype [maturation ralentie]
- Les individus des deux variétés naturelles utilisés au départ sont homozygotes pour les deux gènes.

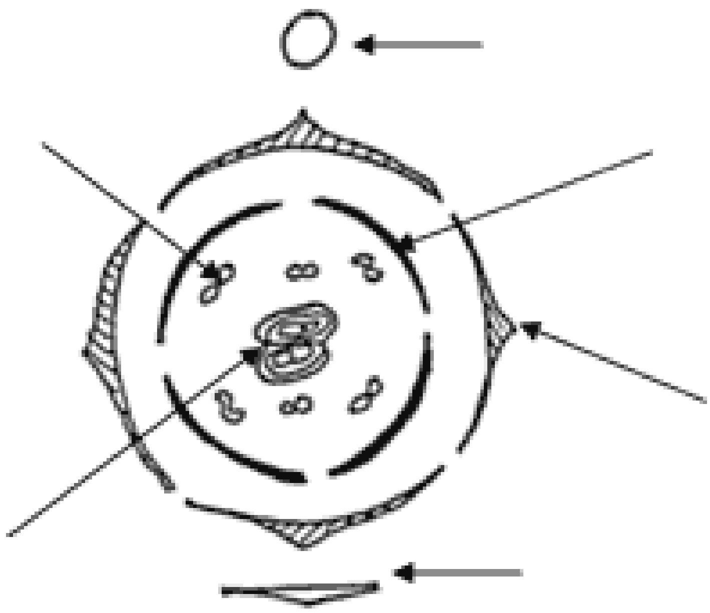
Il sera tenu compte de la présentation des croisements et des échiquiers de croisements, ainsi que des conventions d'écriture en génétique.

Numéro de candidat

À rendre avec la copie

Question 4 : Complétez le schéma suivant en plaçant les légendes et un titre **(2 points)**

Titre :



CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET METIERS

C.P.D.A.

CENTRE DE PRÉPARATION AU
DIPLÔME D'ÉTAT D'AUDIOPROTHÉSISTE

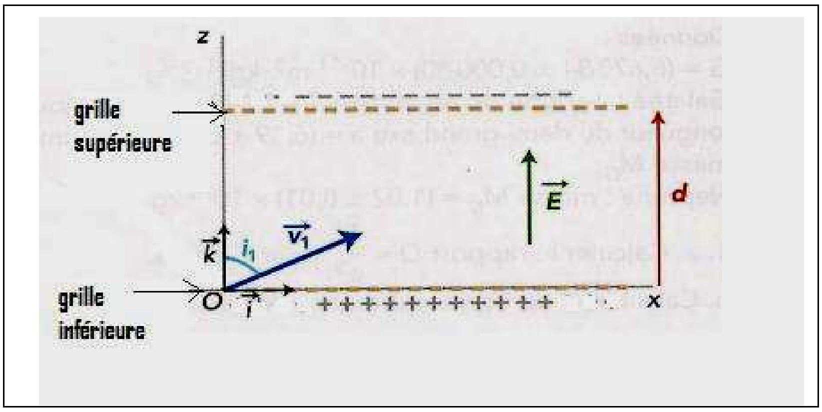
Examen d'admission - juin 2013

(L'usage de la calculatrice n'est <u>PAS</u> autorisé)

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 : TRAJECTOIRE D'UN ELECTRON

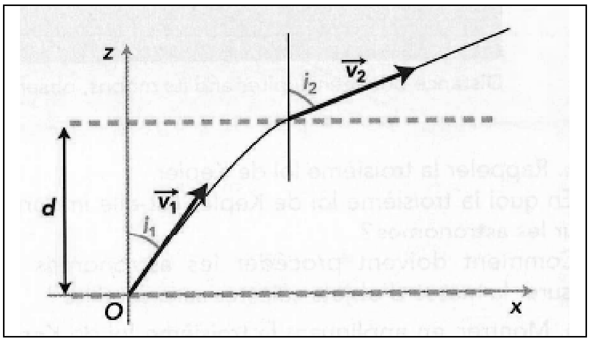
Un électron de masse m et de charge électrique –e arrive avec une vitesse de valeur v_1 (assez faible pour qu'on ne prenne pas en compte d'effets relativistes) au point O.
Il pénètre alors dans une région séparée par deux grilles horizontales entre lesquelles règne un champ électrostatique uniforme vertical ascendant de valeur E.
Les deux grilles sont séparées d'une distance d.



Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1) Quelles sont les forces qui agissent sur l'électron pendant son trajet dans la zone entre les deux plaques ? Donner leurs caractéristiques.
   Montrer, en calculant les ordres de grandeur des forces en action, que l'on peut négliger le poids de l'électron (ce que l'on fera dans toute la suite de l'exercice).
   <u>Données :</u> $m = 9{,}11\ 10^{-31}$ kg $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C $E = 1000$ V m^{-1}
   $g = 9{,}81$ N kg^{-1}
   <u>Aucune autre application numérique ne sera exigée dans la suite de l'épreuve.</u>
2) En utilisant les lois appropriées, établir les équations horaires du mouvement de cet électron sachant que le vecteur v_1 fait un angle i_1 par rapport à l'axe vertical Oz.
3) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire (expression littérale).
4) a) Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron ?
   b) Dans le cas où il n'atteindrait pas la grille supérieure, représenter sur un schéma que vous aurez sommairement reproduit, l'allure de sa trajectoire ainsi que le vecteur vitesse au sommet S de la trajectoire.
   c) Déterminer à l'aide de la question précédente les coordonnées du vecteur vitesse en S.
   d) En déduire l'expression littérale de la date t_S à laquelle l'électron atteint le point S.
   e) Donner l'expression littérale de l'ordonnée z_S du sommet de la trajectoire.
5) Quelle condition doit respecter la valeur E du champ électrostatique pour que l'électron atteigne la région au-dessus de la grille supérieure (expression littérale)?

6) a) Dans ce cas là, quel sera alors le mouvement ultérieur de l'électron dans cette région ?
b) L'électron traverse la grille avec une vitesse v_2. On note i_2 l'angle entre ce vecteur et la verticale.
La situation est représentée par le schéma suivant :



Exprimer le sinus de l'angle i_2 en fonction de v_1, v_2 , et du sinus de l'angle i_1.
c) Au début du XXème siècle, on pouvait lire dans certains textes scientifiques que « *dans certains dispositifs, les faisceaux d'électrons ont un comportement analogue à celui de rayons lumineux. Il est possible de reproduire les phénomènes de réflexion et de réfraction.* »
Justifier cette phrase à l'aide de votre réponse au 6b).

EXERCICE II : LES ANNEAUX DE SATURNE

« On pourrait croire que les anneaux de Saturne sont d'un seul tenant. En fait il s'agit de nuées de pierrailles, dispersées tout au long d'un plan équatorial, qui circulent en orbites individuelles autour de la planète » affirmait Hubert Reeves dans un de ses ouvrages, *Poussières d'étoiles*.

Le but de cet exercice est de juger la compatibilité d'un modèle avec la deuxième phrase de cette citation.

1. L'interaction de gravitation :
On considère une planète *P*, de symétrie sphérique, de masse *M* et un objet assez petit (assimilable à un point matériel) de masse *m* situé à l'extérieur de la planète.
Donner l'expression vectorielle de la force F exercée par la planète sur l'objet. On précisera, sur un schéma, la direction et le sens de cette force ; on définira de façon précise les différents paramètres utilisés pour l'exprimer.

2. Satellite gravitant sur une orbite circulaire :
a. Dans l'étude d'un satellite terrestre, on utilise le référentiel géocentrique. Dans le cas présent, quel référentiel analogue doit-on choisir ? Préciser ses caractéristiques.
b. Un objet ponctuel gravite sur une orbite circulaire, de rayon r, soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle de la planète P.
Montrer que la valeur de la vitesse v de l'objet reste constante et exprimer cette vitesse en fonction de r et des paramètres définis au 1.
c. Définir la période de révolution T et donner son expression avec les mêmes paramètres que la vitesse v.
Montrer qu'on retrouve ainsi la troisième loi de Kepler.
Préciser, dans la situation présente, l'expression de la constante utilisée dans cette loi.

3. Disposition d'une série d'objets ponctuels sur une même orbite ;
Soit un ensemble d'objets, assimilables à des points matériels, mais de tailles et de masses différentes, satellisés autour de Saturne sur une même orbite circulaire de rayon r qu'ils parcourent tous dans le même sens.
La figure 1 du tableau ci-dessous donne la configuration de ces objets à un instant de date donnée (les échelles de taille des objets, par rapport à Saturne, n'ont pas été respectées).

On fait en outre l'hypothèse que les interactions gravitationnelles entre ces objets sont négligeables par rapport à celle exercée par Saturne sur chacun d'eux.

a. Tous ces objets ont-ils la même vitesse sur l'orbite ? Justifier.

b. Comment évolue la structure de l'ensemble au cours du temps ?

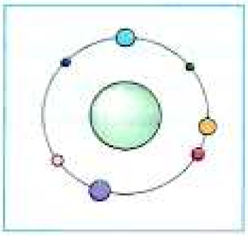
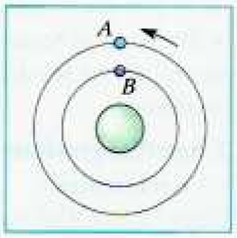
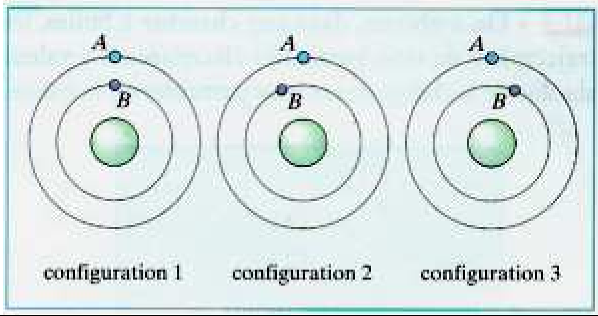
		

Figure 1 (question 3)	**Figure 2 (question 4)**	**Figure 3 (question 4)**

4. Disposition de deux objets ponctuels sur deux orbites de rayons différents :

Soient deux objets A et B, assimilables a des points matériels, satellisés autour de Saturne sur deux orbites circulaires de rayon r_A, et r_B différents ($r_A > r_B$), mais de valeurs voisines.

La figure 2 du tableau précédent donne la configuration de ces objets à un instant de date donnée : ils sont disposés de façon que la direction AB passe par S, le centre de Saturne ; la flèche indique le sens des mouvements (les échelles des rayons n'ont pas été respectées).

Ici encore, on considère que l'interaction gravitationnelle entre ces deux objets est négligeable et que seule celle de Saturne intervient.

À une date ultérieure, l'objet satellite A a effectué exactement une révolution autour de Saturne ; on souhaite savoir où se trouve l'objet B sur son orbite.

Indiquer, en justifiant, laquelle des trois configurations proposées dans la figure 3 du même tableau est possible.

5. Les anneaux de Saturne

a. Décrire le mouvement des particules constituant un <<anneau» de Saturne.

b. Décrire sommairement le mouvement des anneaux les uns par rapport aux autres.

c. A l'aide de l'étude qui précède, en supposant valides les hypothèses faites au 3, montrer que si les anneaux de Saturne ont été a un moment donné d'un seul tenant (soudés les uns aux autres), il est peu probable qu'ils aient pu le rester.

6. La sphère de Roche

Une autre raison explique en partie l'existence des anneaux de Saturne.

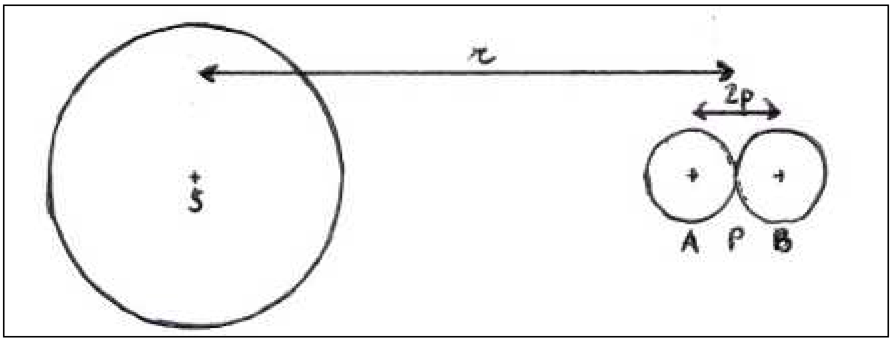
Il existe une distance R_0, appelée rayon de la sphère de Roche qui marque la limite entre une zone ou des satellites peuvent se former par assemblage de poussières, cailloux… qui s'étaient formés en même temps que l'astre et une zone où cet assemblage est rendu impossible par l'action de l'astre.

Il s'agit dans la suite de déterminer les raisons de l'existence de cette limite.

a) On considère donc deux sphères homogènes identiques en contact de masse m et de rayon p telles que la distance de leurs centres A et B soit AB = 2p.

Le centre de gravité P de l'ensemble des deux sphères tourne à une distance r du centre S de Saturne.

Les points S, A, P et B sont alignés.



Exprimer en fonction des paramètres utiles la valeur de la force d'attraction F_{AB} qui s'exerce entre les sphères de centres A et B.

b) Les deux sphères sont attirées par Saturne par deux forces de valeur $F_{S/A}$ et $F_{S/B}$.
Donner l'expression de $F_{S/A}$, de $F_{S/B}$ puis de la différence $F_{S/A}$-$F_{S/B}$.
On montre (non demandé ici) que la valeur de la différence de ces forces est $F_{S/A} - F_{S/B} = 4\ G\ M\ m\ p/r^3$ et que cette différence d'attraction a tendance à séparer les deux sphères.
Pourquoi les deux sphères ne sont-elles pas attirées de la même façon par Saturne ?

c) R_0, le rayon de la sphère de Roche, est tel que pour $r = R_0$, on a : $F_{AB} = F_{S/A} - F_{S/B}$.
L'espace où les deux éléments A et B peuvent se regrouper pour donner naissance à un élément plus gros est-il défini par $r < R_0$ ou par $r > R_0$? Justifier la réponse
A votre avis , dans quelle zone se situent les anneaux de Saturne et où sont situés ses satellites ?